ANNEXE 2

Fragment de la Logique canonique classique II
Composant syntaxique et sémantique hyper simple
pour la coordination vérifonctionnelle

Formules du Calcul des coordinations classiques

Nous distinguons la partie plus ou moins formalisée de la langue auxiliaire L_{2+1} du processus syntaxique proprement dit L_2, objet strict dont nous définissons la production des éléments dans un premier temps.

Nous donnons, dans un deuxième temps, un second composant constitué par les moyens déductifs qui permettent d'établir un texte T_2, dit aussi théorie, écrit dans les termes produits par le premier composant.

Dans l'écriture du commentaire L_{2+1} nous aurons recoure à deux caractères accessoires :

0.1. Le caractère d'<u>assertion</u> $\vdash$ qui <u>labellise</u> les formules de L_2 faisant partie du texte T_2.

0.2. Le caractère de <u>substitution</u> (Q | p) P qui <u>écrit</u> la formule obtenue en substituant la formule Q à chaque occurrence de la lettre p dans la formule P.

1. Le Calcul des coordinations classiques (L_2,T_2)

a_1 - Le composant grammatical, de stricte syntaxe : L_2

1.1. Les lettres

1.1.1. Les petites lettres p, q, r, ...

1.1.2. Les deux connecteurs $\neg$ et $\vee$

1.1.3. les parenthèses (,).

1.2. Les clauses formatives

1.2.1. Les petites lettres sont des formules une à une

1.2.2. Si P est une formule, alors $\neg$ P est une formule

1.2.3. Si P et Q sont des formules, alors $(P \vee Q)$ est une formule

1.3. Abréviations

1.3.1. $(p \wedge q) =_{def} \neg (\neg p \vee \neg q)$, 1.3.2. $(p \Rightarrow q) =_{def} (\neg p \vee q)$,

1.3.3. $(p \Leftrightarrow q) =_{def} ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$, et leur négations.

a_2 - Le composant démonstratif, de stricte déduction : T_2

2.1. Les clauses déductives

2.1.1. Le détachement : Si $\vdash$P et $\vdash (P \Rightarrow Q)$, alors $\vdash$Q

2.1.2. La substitution : Si $\vdash$P, alors $\vdash$ (Q | p)P

2.2. Les axiomes

2.2.1. $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$

2.2.2. $\vdash ((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)))$

2.2.3. $\vdash ((\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow ((\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow p))$

2.3. Abréviations

Encore dans l'*objet littéral* L_2

2.3.1. $I =_{def} (p \vee \neg p)$. 2.3.2. $O =_{def} (p \wedge \neg p)$.

Du *commentaire littéral* L_{2+1}

2.3.3. $P \dashv\vdash Q =_{def} \vdash (P \Leftrightarrow Q)$. 2.3.4. $P \vdash Q =_{def} \vdash (P \Rightarrow Q)$.

2. Les modèles servant aux commentaires de la coordinations classiques

Au lieu de la présentation axiomatique proposée ici à titre indicatif, c'est son existence qu'il suffit de noter d'abord et les termes de sa définition ensuite, pour vérifier que cette existence et cette définition correspond bien aux différents modèles que nous voulons lui donner afin de les utiliser comme commentaires pour faire sens dans la pratique de ces calculs.

Ces modèles sont au nombre de trois.

Nous voulons seulement rappeler ici l'existence de ces calculs qui peuvent être présenter en termes de Tables de vérité, de diagrammes de type Euler-Venn-Carroll, ou du calcul algébrique booléien. Ce rapprochement entre différents moyens permet aussi de s'interroger sur les style d'écriture qui impliquent différents type de *lecture* de ces diverses interprétations elles mêmes.
Il est évident que nous ne traiterons pas cette question ici, la réservant pour d'autre occasion et voulant seulement maintenant commencer à présenter cette question en acte en proposant au lecteur qu'il s'exerce d'abord à ces différentes lectures pour en apprécier les difficultés.

Nous voulons dire surtout qu'il ne faut pas croire que ce type de problème est résolu par les praticiens qui ont seulement magnifiquement commencé à inventer et à développer ces écritures et ces interprétations au cour des deux derniers siècles, à partir de Boole et de Frege, avec toutes les faiblesses et les hésitations propres à l'invention et à la découverte.

En un mot, le caractère silencieux (dogmatique) de cette pratique de la lecture et de l'écriture ne doit pas faire illusion ni intimider du fait d'une croyance en une totalisation qui se révèle impossible si on fait preuve d'un peu de lucidité avec Lacan lorsqu'il remarque qu'une langue vernaculaire parlée reste toujours nécessaire afin de présenter un quelconque jeu d'écriture afin d'en disposer pour le pratiquer dans son effectivité. Nous rejetons ainsi le terme de formalisation pour ne retenir que ce qui est mathématique en fait d'exercice de la lettre jusqu'à son bord le plus extrême, toujours rétroactif dans la langue parlée pratique incontrôlable dans son absence de dogmatisme.

Elle n'aura l'effet contraire que pour ceux qui veulent encore dominer, intimider et exploiter les autres au nom de leur amour du pouvoir de la vérité à résister au savoir (symptôme).

Dans ces trois versions nous renvoyons le lecteur aux nombreux ouvrages de styles et de difficultés très divers qui sont disponibles afin d'enseigner ce composant souvent nommé calcul propositionnel (CP).

Il devrait être entendu qu'un style trop simple, sans l'ambition d'un acte, est plus dommageable pour le lecteur qui se trompera si il veut brûler les étapes pratiques de l'effectivité.

Mais la simplicité ici ne veut pas dire faiblesse si nous ne renonçons pas à l'ambition tragique d'un style pertinent en lien à la matérialité de son objet.

1. Tables de vérité

Il suffit de deux tables primitives (on montre qu'elles peuvent se réduire à une seule) pour produire toutes les autres.

p	q	$p \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

p	$\neg p$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

la disjonction et la négation

où

T (lire T) désigne :
- "tombe sous" pour un concept,
- "dedans" pour une extension de concept
- "vraie" pour une proposition

⊥ (lire anti T) désigne :
- "ne tombe pas sous" pour le concept
- "dehors" pour une extension de concept
- "fausse" pour une proposition

Donnons quelques autres tables bien connues qui peuvent nous servir.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	⊥
⊥	⊥	⊥

la conjonction

p	q	p => q
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	T
⊥	⊥	T

l'implication

p	q	p = q
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	⊥
⊥	⊥	T

l'équivalence symétrique

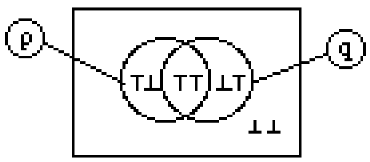
p	q	p + q
T	T	⊥
T	⊥	T
⊥	T	T
⊥	⊥	⊥

la différence symétrique

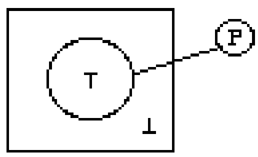
2. Diagrammes

Ceux sont de strictes tranlittérations des tables qui se dessinent en deux temps séparés par une scansion qui correspond au trait double de nos tables. Le premier temps diffère selon le nombre de termes élémentaires composant la formule. Il y a autant de ronds que de ces composants et les ronds doivent se croiser pour former autant de zones que de distributions de valeurs T et antiT sous les termes composants.

Ainsi donnons le premier temps des translittérations des tables dans les cas de deux termes ou d'un seul terme.



Deux termes p et q



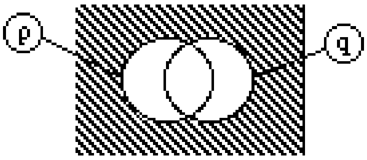
un terme p

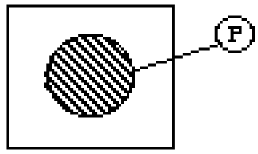
Malgré les études de Venn sur cette question, les énoncés dont le nombre maximum composants distincts ne dépasse pas trois se prêtent le mieux à cette version du sens réduit de cette coordination de propositions ou de concept du langage des prédicats du premier ordre.

Fort de ce premier temps qu'il ne faut pas oublier trop vite, nous pouvons remplir les zones ainsi désignées.

Ce sera notre second temps qui translittére ce qui se trouve de l'autre côté du double trait de nos tables. Nous attribuons à chaque zone une couleur (deuxième temps) correspondant à la valeur attribuée à chaque distribution de la table marquant la zone (premier temps), grâce à deux couleurs distinctes bien choisies.

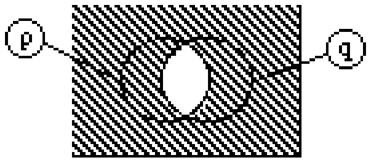
Nous décidons de marquer par la couleur blanche la valeur dite T et par des hachures la valeur dite antiT



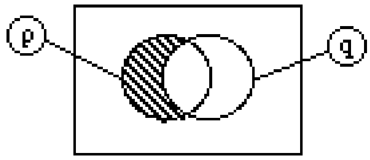


la disjonction et la négation

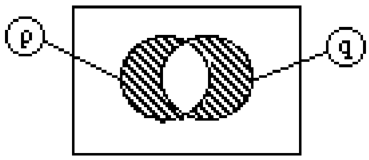
Donnons les autres diagramme qui peuvent aussi servir.



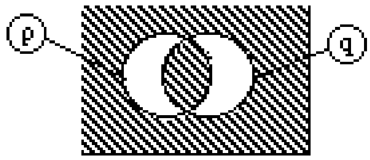
la conjonction



l'implication



l'équivalence symétrique



la différence symétrique

Il est trop évident que ces diagrammes peuvent être confondus avec des éléments de théorie des ensembles. Ils ne sont pas des diagrammes ensembliste mais des diagramme de classes ou encore d'extensions de concepts.

Ceux sont les diagrammes ensemblistes qui sont des spécifications de ceux-ci, et nous espérons que l'ensemble de ces annexes permettra au lecteur de l'apprécier si il va jusqu'au bout.

Les différentes interprétations en termes de propositions et de classes ne diffèrent que sur un point décisif pour la logique.

L'interprétation en terme de propositions suppose que la classe cernée par le rectangle de référence ne contient qu'un objet.Cette objet ne peut donc se trouver qu'en un endroit à la fois même si plusieurs zones sont laissées blanche, sont réputées non vide, les hachure indiquant au contraire que la zone conservée est vide par nécessité.

C'est ici que se joue la question de l'énonciation, de la lisibilité des traits non marqués déjà engagée par la définition du caractère d'assertion dés le début de cette annexe. Nous ne traitons pas ici de cette question préalable aux formules de la sexuation puisqu'il s'agit de la fonction phallique elle-même et que nous traitons cet aspect crucial de : sexe, dans nos deux études intitulées respectivement *Afin de préciser le narcissisme* et *Clef de la passe*[1]

3. Calculs algébriques de Boole, version mathématique de la logique dans la langue du commentaire.

Si nous définissons une relation d'équivalence dans le langage auxiliaire, la langue de notre commentaire, nous pouvons dans cette langue qui connaît la théorie des ensembles puisqu'il s'agit du français de la fin du siècle vingt, non seulement parler du quotient ensembliste de l'ensemble des énoncés bien construit et même l'effectuer pour obtenir une algèbre de Boole des classes d"équivalence de formules.

Sous ces conditions, jamais suffisamment précisées, notre logique de la coordination des énoncés entre eux, qu'ils soient propositionnels ou conceptuels (prédicats monadiques), devient une algèbre facile à pratiquer comme un calcul arithmétique un peu spécifique.

---

[1] Cette étude se divise en trois parties *L'amour du tout aujourd'hui*, *Clé de la passe* proprement dite et *Éros et psyché*.

Nous pouvons définir dans ce quotient une structure d'Anneau de polynômes. C'est notre Algèbre de Boole ainsi désignée du fait de relever également d'une structure linéaire d'Algèbre. Cet anneau de Boole possède également une structure d'ordre canonique dite de Treillis de Boole un treillis distributif.

Il s'agit de l'anneau $K = \bigcup_{n \in N} K_n$ des polynômes à coefficients dans $Z_2=\{0, 1\}$ où les anneaux $K_n = Z_2\text{-}[X_0, X_1, ..., X_i, ..., X_n]$ sont des polynômes à n variables à coefficients dans Z_2.

Cette arithmétique se pratique dans un Anneau de Boole, c'est ce qu'elle a de spécifique.

Un anneau est un groupe additif muni d'une multiplication associative qu'il est facile de rendre unitaire.

L'axiome de Boole qui s'y agrége afin que cet anneau soit dit : "de Boole", est d'une simplicité renversante puisqu'il s'écrit dans le composant un peu construit de notre commentaire

$$\forall x \; (x \in K \wedge (x^2 = x)).$$

Rendant le nombre deux inaccessible.

Le fait que cet anneau soit de caractéristique deux (2) est une conséquence de cet axiome, sans doute la plus importante puisqu'elle étaye le fait qui se répète partout, qu'il y a quelque chose de binaire dans cette logique. En fait la logique relève de structures qui se développent selon la série des puissances de deux : 2^n, ou mieux encore 2^{2^n}.

Cette conséquence est très facile à démontrer. Démontrons la.

Il suffit d'écrire l'axiome de Boole pour l'élément de l'anneau qui s'écrit (x + 1).

$$(x + 1)^2 = (x + 1)$$

ceci se décline grâce à une identité remarquable bien connue des collégiens,

$$x^2 + 2x + 1 = x + 1$$

d'où il faut utiliser de nouveau l'axiome de Boole pour obtenir

$$x + 2x + 1 = x + 1.$$

Nous sommes ainsi arrivé par soustraction de x + 1 des deux côtés de l'égalité, à calculer dan cet anneau de Boole que

$$2x = 0.$$

C'est la définition de la caractéristique d'un anneau, le nombre par lequel il faut et il suffit de multiplier un élément quelconque pour obtenir zéro. Ici, c'est deux.

Nous pouvons dire avec Lacan (*Ou pire...*) qu'en algèbre de Boole, l'algèbre de la logique, le deux est inaccessible[2].

Donnons maintenant quelques correspondance qui permettent de traduire le calcul de la coordination logique en algèbre de Boole.

0. Les deux lois de composition interne de notre anneau correspondent

- Pour l'addition à la différence symétrique.

---

[2] Sous entendu comme le premier ordinal infini parmi les ordinaux fini, pour la simple raison qu'il ne fait pas parti de leur ensemble, il est lui-même cet ensemble et ne s'appartient pas à lui-même, sort commun.

p	q	$p + q$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

- Pour la multiplication à la conjonction.

p	q	$p \wedge q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

x	0	1
0	0	0
1	0	1

Les autres connections binaires se compose à partir de ces deux la.

1. Le caractère parasitaire de l'assertion qui écrit qu'un énoncés P est une thèse est rendu par l'égalité avec 1

$$P = 1 \text{ vient pour } \vdash P$$

Le chiffre 1 étant l'élément neutre de la multiplication.

Nous pouvons l'expliquer en reprenant les derniers caractères abréviateurs de (L_2,T_2) donnés plu haut.

2.3.1. $I \underset{def}{=} (p \vee \neg p)$ correspond à la classe des thèses notée 1 l'élément neutre de la multiplication.

2.3.2. $O \underset{def}{=} (p \wedge \neg p)$ correspond à la classe des antithèses noté 1 l'élément neutre de l'addition.

Nous venons de rencontrer le chiffre 1 comme classe des thèses, nous pouvons construire la négation classique ici grâce à la différence symétrique,

L'expression algébrique $(p + 1)$ correspond bien à la négation $\neg p$.

Puis nous trouvons, mais dans le *commentaire littéral* L_{2+1}

2.3.3. $P \vdash\!\dashv Q \underset{def}{=} \vdash(P \Leftrightarrow Q)$ l'équivalence tautologique qui correspond au signe égal en algèbre la relation d'identité de notre ensemble quotient.

D'où, ce que nous proposions pour écrire l'assertion dans le métalangage.

2.3.4. $P \vdash Q \underset{def}{=} \vdash(P \Rightarrow Q)$ correspond à la relation d'ordre entre les classes d'équivalences de formules qui permet de construire le treillis associé à toute anneau de Boole qui est distributif.

2. Donnons pour finir la liste des polynômes à deux variables à coefficients dans Z_2 qui produisent les connecteurs classiques de la coordination binaire. Ceci veut dire qu'ils ont l'allure algébrique de séquence comme celle-ci

$$\alpha xy + \beta x + \gamma y + \delta$$

où les coefficients α, β, γ et δ sont éléments de $Z_2= \{0, 1\}$. 'est dire que le choix n'est pas très difficile à faire, pour les amateurs disons qu'ils sont seize égal 2^4.

En place des petites lettres p et q de notre construction nous les écrirons en termes de x et y pour faire plus algébrique mais aussi plus sérieusement pour habituer le lecteur à ce type de translittération hyper simple qui fait autant râler les paranoïaques que l'existence de l'homosexualité à côté de l'hétérosexualité et malgré l'anatomie. D'où l'intérêt pour eux de la psychanalyse qui consiste principalement à surmonter ce léger désagrément momentané et fort commun, en apprenant à lire avec Freud et avec Lacan au lieu de compenser son délire et de vouloir se soigner d'une maladie qui n'en est pas une.

A partir du polynôme le plus riche

$$xy + x + y + 1$$

dont tous les coefficients sont égaux à 1, nous pouvons énumérer cette liste en remplaçant 1 par 0 :

$xy + x + y + 1$	$x + y + 1$
$xy + x + 1$	$x + 1$
$xy + y + 1$	$y + 1$
$xy + x + y$	$x + y$
$xy + 1$	1
$xy + x$	x
$xy + y$	y
xy	0

Le problème maintenant étant moins de les énumérer que de les lire dans cette liste.

Il s'agit des seize connecteurs au plus binaires qui peuvent s'écrire grâce aux caractères primitifs : $\neg$ et $\vee$ de notre construction (L_2,T_2), auxquels nous pouvons adjoindre les caractères abréviateurs $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ et leur négations respectives $\not\vee, \not\wedge, \not\Rightarrow, \not\Leftarrow, \not\Leftrightarrow$. Soit onze caractères auxquels il faut ajouter .

Or ceci est très facile si on décide de s'orienter grâce à quelques traits simples.

- la négation $\neg p$ correspond à $+1$,

nous divisons la liste en deux grâce à la présence ou à l'absence de la négation marquée.

- Les constantes correspondent à la conjonction et à la disjonction des opposés par négation.
- la somme $(x + y)$ correspond à l'union exclusive $(p \not\Leftrightarrow q)$.
- le produit xy correspond à la conjonction $(p \wedge q)$,

additionnées entre elles ces deux connecteurs définissent la disjonction.

- Le dernier point reste le plus surprenant pour les novices et fut longtemps considéré comme l'occasion d'un paradoxe.

L'implication est plus facile à connaître par sa négation.

x	p	$(x + 1)$	$\neg p$
y	q	$(y + 1)$	$\neg q$
0	$(p \wedge \neg p)$	1	$(p \vee \neg p)$
$(x + y)$	$(p \not\Leftrightarrow q)$	$(x + y + 1)$	$(p \Leftrightarrow q)$
xy	$(p \wedge q)$	$(xy + 1)$	$(p \not\wedge q)$
$(xy + x + y)$	$(p \vee q)$	$(xy + x + y + 1)$	$(p \not\vee q)$

et enfin les moins simples

$(xy + x) = x(y+1)$	$(p \not\Rightarrow q) = (p \wedge \neg q)$	$(xy + x + 1)$	$(p \Rightarrow q)$
$(xy + y) = (x+1)y$	$(p \not\Leftarrow q) = (\neg p \wedge q)$	$(xy + y + 1)$	$(p \Leftarrow q)$

fin de la seconde annexe